

平成17年度 卒業論文

# スピンネットワークによる 角運動量の図式表現

東京工業大学 理学部 物理学科

石川 哲朗

学籍番号：02-0168-4

指導教官：坂井典佑・伊藤克司

平成18年2月27日提出, 3月18日修正

## 目次

1	はじめに	3
2	スピネットワークの基礎付け	4
2.1	バイノールの発見	4
2.2	バイノール計算の基礎	8
2.3	n本線のループ	10
2.4	Temperley-Lieb 代数	13
2.5	n本線ループの値 $\Delta_n$ の別導出	17
2.6	頂点	19
2.7	頂点の“ひねり”と $\lambda$ 移動	21
2.8	$\theta$ ネット	23
2.9	彩色法	24
2.10	バブル図式	26
3	角運動量の表現	27
3.1	$ j, m\rangle$ 表現	28
3.2	Pauli 行列の性質	35
3.3	角運動量の合成	38
4	まとめ	42
5	謝辞	44
	参考文献	44

# 1 はじめに

数理論理学者の Penrose は、一般相対論における Penrose 図や、不可能図形として有名な Penrose 三角形、さらには長らく自然界に存在しないと思われていた五回対称性を備えた Penrose タイルなど、さまざまな発見とともに数多くの技法を編み出した。それらに共通する重要な特徴は、図式や絵などにより直感的な理解に訴えてくるところであり、イメージ力の素晴らしさを物語っている。また、彼は複雑な計算を行う際に、独自の絵記号を用い、それらは堅苦しい計算という次元を超えてまるでアートのようにあり、見ていだけでも実に楽しそうである。しかし、観て鑑賞するだけではなく、できればその表現法を学び、使いこなせるようになれば、計算が楽しくなるばかりではなく、その式の表す内容に対する理解もより深まるはずである。

ここに、今回取り上げる表現法を用いた一例を挙げる。

$$\text{Diagram 1} - 3 \text{Diagram 2} = \text{Diagram 3} \quad (1a)$$

これはただの抽象画が、もしくは何かの暗号のようにも見えるが、よく見ると等号などが含まれているので、数式を表しているらしいことはおおよそ見当が付く。実は、これは次のテンソル方程式を表現している。

$$D_{\rho\tau}^{\alpha\gamma} A_{\gamma\sigma}^{\beta} - 3D_{\gamma\sigma}^{\beta\alpha} A_{\tau\rho}^{\alpha} = \delta_{\sigma}^{\alpha} x^{\beta} y_{\rho} y_{\tau} \quad (1b)$$

ここで、テンソルを以下のような図式に置き換えている。

$$D_{\rho\sigma}^{\alpha\beta} \sim \text{Box with } \alpha, \beta \text{ on top and } \rho, \sigma \text{ on bottom}, \quad A_{\rho\sigma}^{\alpha} \sim \text{Triangle with } \alpha \text{ on top and } \rho, \sigma \text{ on bottom}, \quad \delta_{\rho}^{\alpha} \sim \text{Line with } \alpha \text{ on top and } \rho \text{ on bottom}, \quad x^{\alpha} \sim \text{Square with } \alpha \text{ on top}, \quad y_{\rho} \sim \text{Triangle with } \rho \text{ on bottom} \quad (2)$$

それぞれのテンソルをいろいろな形の箱（箱の中に記号を書き入れることもある）に対応させ、上付きの添え字は箱から上に出た端子、下付き添え字は箱から下に出た端子で表す。そして、同じ添え字について和を取って縮約するときには、端子同士を線でつなぐことにする。こうすることにより、どの添え字とどの添え字で和を取るのか一目瞭然であり、ダミーの添え字を省くこともできて便利である。ただし、まだこれだけでは、ただ単に式を記号に書き換えただけなので、さらにテンソル計算との対応関係を組み込み、あるルールに基づいた図式の変形による計算を行えるようにする。このような表記法を、抽象テンソル図式と呼ぶことがある。

この図式による表現は、今挙げた例のように、添え字のたくさん付いた計算で特に威力を発揮する。今回はその中でも、スピノール量についてのやっかいな計算を図式的に行い、量子力学における角運動量の表現を与えるスピンネットワークを紹介する。

## 2 スピンネットワークの基礎付け

この章では、スピンネットワークの基礎となるパイノール計算と呼ばれる図式手法について詳しく調べ、さまざまな関係式や公式を導出する。パイノールは、数学的には  $SU(2)$  (より一般には  $SL(2, \mathbb{C})$ ) の表現を与えることが知られている。そこで、まずは  $2 \times 2$  行列と図式との対応関係を考えることから出発する。

### 2.1 パイノールの発見

まずは、 $2 \times 2$  行列 (2 階のテンソル) と図式とを対応付ける方法を、発見的な観点から探ることにする。そこで、最も基本的であると思われる単位行列を表すことから始める。2次元の Kronecker  $\delta$  を成分表示すると、

$$(\delta_A^B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3a)$$

ここで、添え字の A、B はそれぞれ 0 または 1 の値を取るものとする、 $\delta_0^0 = \delta_1^1 = 1, \delta_1^0 = \delta_0^1 = 0$  となる。(以下、大文字のアルファベットで表される添字は、全て 0 か 1 の値をとることにする。) この  $\delta$  をなるべく単純な図式で表そうとすると、1本の縦に伸びる線の上と下に1つずつ添え字を付けて表現できる。

$$\delta_A^B \sim \begin{array}{c} B \\ \left. \vphantom{\int} \right\} \\ A \end{array} \quad (3b)$$

すると、たとえば次のような値をとることになる。

$$\begin{array}{c} 0 \\ \left. \vphantom{\int} \right\} \\ 1 \end{array} = 0, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \left. \vphantom{\int} \right\} \\ 1 \end{array} = 1 \quad (3c)$$

これで上下に1つずつ添え字の付いた縦方向に伸びる線を定義したので、次に添え字が両方上付き、または両方下付きであるような曲がった線を導入するのが自然である。それをどんな量と対応付けるかについてはさまざまな選択肢があるが、ここでは完全反対称行列  $\epsilon$  と対応付ける。

$$(\epsilon_{AB}) = (\epsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4a)$$

に対して、

$$\epsilon_{AB} \sim \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{A} \quad \text{B} \end{array}, \quad \epsilon^{AB} \sim \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \\ \text{---} \end{array} \quad (4b)$$

という表現を与えてみることにする。

さらに、テンソルの言葉で言うところの、上付きと下付きに同じ添え字が現れたときに、その添え字について和を取って縮約することを、線の表現では同じ添え字をつなげることによって表す。すなわち、和の規約を、線をつなげるという単純な操作で簡略化することになると、ここまでの定義を用いて、次のような図式による計算を行うことができる。

$$\delta_A^C \epsilon_{CB} \sim \left. \begin{array}{c} C \\ \text{)} \\ A \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{)} \\ C \\ \text{)} \\ B \end{array} = \begin{array}{c} \text{)} \\ A \\ \text{)} \\ B \end{array} \sim \epsilon_{AB} \quad (5)$$

つまり、曲がった線は、縦に伸びる線の添え字を1つ下げたものと解釈することができて、このことは、 $\delta_A^C \epsilon_{CB} = \epsilon_{AB}$  という恒等式とこの表現が上手く整合していることを意味する。

しかし、ここまでのところは上手く行っているが、いろいろ試しているうちにいくつか不便な性質が現れてしまうことが分かる。その1つ目としては、次の恒等式を表現しようとするときに起こる。

$$\delta_A^C \epsilon_{CD} \epsilon^{DE} \delta_E^B = \epsilon_{AD} \epsilon^{DB} = -\delta_A^B \quad (6a)$$

これを線による表現に置き換えると、

$$\begin{array}{c} \text{)} \\ C \\ \text{)} \\ A \end{array} \begin{array}{c} \text{)} \\ D \\ \text{)} \\ E \end{array} \begin{array}{c} \text{)} \\ B \\ \text{)} \\ E \end{array} = - \begin{array}{c} \text{)} \\ B \\ \text{)} \\ A \end{array} \quad (6b)$$

また、これとは別の恒等式についても、

$$\epsilon_{AD} \epsilon_{BC} \epsilon^{CD} = \epsilon_{AD} (-\delta_B^D) = -\epsilon_{AB} \quad (7a)$$

この式に対応するものは、

$$\begin{array}{c} \text{)} \\ \text{)} \\ A \end{array} \begin{array}{c} \text{)} \\ B \\ \text{)} \\ C \\ \text{)} \\ D \end{array} = - \begin{array}{c} \text{)} \\ A \\ \text{)} \\ B \end{array} \quad (7b)$$

これらから分かることは、線の曲がり方を変化させると、負符合が付く場合があるということである。このことは、平面上に乗ったしなやかなひもを变形させた場合に期待されるような直感的な結果に反するので、計算を行う際に不便である。そこで、この不都合を解消する方法を考える。

まず、余計な負符合の由来について調べると、 $\epsilon_{AB}\epsilon^{BC} = -\delta_B^C$  というように、2つの  $\epsilon$  に対して添え字を1つ縮約すると、 $\delta$  ではなく、 $-\delta$  になるという性質による。これは、上に凸な曲線と下に凸な曲線を結ぶ場合、上下への曲がりをキャンセルしてまっすぐに伸ばそうとすると、負符合が付くことを表す。

この負符合の解釈の仕方の一つとしてまず考えられるのは、曲線の極大点だけ（または極小点だけ）に負符合を割り当てる方法である。この解釈を用いて上の不都合を見直すと、上の例では、極大点が1個から0個へと減り、下の例では、極大点が2個から1個へと減っているため、どちらもその差は極大1つ分、すなわち負符合1つ分の因子が掛かることになる。

歴史的には先に導入されたこの考え方によって、この負符合に説明は付くが、図式を描く際に極大（または極小）の数をいちいち気にして符合を付けなければならないのは厄介である。また、極大と極小のどちらかだけを特別扱いせざるを得ない。そこで、この非対称を解消するために、よりエレガントな改善手法が求められる。そのためには、曲線を延ばしたり、またはその逆の操作をするときには、必ず極大と極小が対で消滅したり生成されることに着目すればよい。つまり、極大・極小それぞれに虚数単位  $i$  を割り振れば、2つ合わされば、負符合を生じさせることができる。そこで、 $\epsilon$  と曲線との対応を見直すことにして、

$$\epsilon_{AB} \rightarrow \tilde{\epsilon}_{AB} = i\epsilon_{AB}, \quad \epsilon^{AB} \rightarrow \tilde{\epsilon}^{AB} = i\epsilon^{AB} \tag{8a}$$

すなわち、再定義された対応関係は、

$$\tilde{\epsilon}_{AB} \sim \text{上凸曲線}, \quad \tilde{\epsilon}^{AB} \sim \text{下凸曲線} \tag{8b}$$

このようにすれば、 $\tilde{\epsilon}$  のペアが現れると、それぞれから1つずつ  $i$  が出て来て、 $i^2 = -1$  により負符合が出現する。

これで上の2つの問題は解決したが、実は別にもう一つ問題があることがすぐに分かる。それは、次の関係を表示しようとするときに現れる。

$$\delta_A^D \delta_B^C \tilde{\epsilon}_{CD} = \delta_A^D \tilde{\epsilon}_{BD} = -\tilde{\epsilon}_{AB} \tag{9a}$$

これを曲線をつないで表そうとすると、

$$\left. \begin{array}{l} D \\ | \\ \left. \begin{array}{l} C \\ | \\ A \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} B \\ | \\ \end{array} \right\} \end{array} \right\} \sim \text{上凸曲線} = \text{自己交差する曲線} = -\text{上凸曲線} \tag{9b}$$

ここに、先程とは異なる新たな負符合が現れており、ひもの変形との類推から期待されるものと違うため、直感的に理解しにくい。そこで、この問題を

解消する方策を考えなければならない。この図式において今までにない状況が起きているとすれば、線の交差の有無が挙げられ、その他に取り立てて特別なことは起こっていないので、交差が問題を引き起こしていると考えざるを得ない。そうと分かれば簡単で、交差が起こったら負符合を付けるという規則を新たに設ければ、全て問題は解決する。

以上で、基本的な対応規則が出揃った。最初の定義からいくつかの変更点や付け足しもあったことなので、ここでルールをまとめておく。

$$\begin{array}{l}
 \delta_A^B \sim \begin{array}{c} B \\ | \\ \text{)} \\ | \\ A \end{array} \quad (10a) \\
 i\epsilon_{AB} \sim \begin{array}{c} \text{)} \\ | \quad | \\ A \quad B \end{array}, \quad i\epsilon^{AB} \sim \begin{array}{c} A \quad B \\ \text{)} \end{array} \quad (10b) \\
 \delta_A^D \delta_C^B \sim - \begin{array}{c} B \quad D \\ | \quad | \\ \text{)} \\ | \quad | \\ A \quad C \end{array} \quad (10c)
 \end{array}$$

この3つの対応ルールを導入すれば、しなやかなひもを連続的に変形させたときに得られる関係から結果を類推できるようになる。また、数学の言葉を使うならば、トポロジ的な変形によって互いに移り合う図式が同値となっている。そのことを表したのが、以下の3つの関係である。

$$\begin{array}{c} A \quad B \\ \text{)} \\ | \\ A \quad B \end{array} = \begin{array}{c} B \\ | \\ \text{)} \\ | \\ A \quad B \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{)} \\ | \quad | \\ A \quad B \end{array} = \begin{array}{c} \text{)} \\ | \quad | \\ A \quad B \end{array}, \quad \begin{array}{c} A \quad B \\ \text{)} \\ | \quad | \\ A \quad B \end{array} = \begin{array}{c} A \quad B \\ \text{)} \end{array} \quad (11)$$

この表現をバイノール (binor) と呼ぶ。中央、および右の関係が成り立つことは、後で直接計算によって確かめる。これらにさらに他の関係を付け加え、より一般化したものは、結び目理論において、Reidemeister 移動と呼ばれる基本的な3つの変形として知られている。また、これらの変形を用いるときには、線の端が上を向いているか下を向いているかが本質的であり、それによってテンソルの添え字が上付きか下付きかを区別するので、線の端の相対的な上下の位置関係は関係ないことを注意しておく。

この節の最後に補足として、ここではやや天下りの  $\delta$  と  $\epsilon$  を図式と対応させることでバイノールを導入したが、これは、 $SU(2)$  (または  $SL(2, \mathbb{C})$ ) 変換で不変なテンソルがこの2つだけであるという数学的事実に基づく。また、曲がった線で添え字の上げ下げができるという性質は、スピノールの添え字の上げ下げを行う  $\epsilon$  の役割なので、曲がった線を  $\epsilon$  に対応付けた。

## 2.2 バイノール計算の基礎

ではこれから、定義から直ちに導かれるいくつかの重要な関係式を導いておく。その一番目は、1本の線が閉じてループになっている場合である。この輪っかを計算するためには、適当な位置に添え字を付加して区切り、 $\delta$  や  $\epsilon$  の組み合わせとして表現すればよい。その分割の仕方は一意的ではないが、ここでは上半分と下半分に区切って、2つの  $\epsilon$  にわける方法で計算してみると、

$$\bigcirc = \bigcup_{A \quad B} = i\epsilon^{AB}i\epsilon_{AB} = -2 \quad (12)$$

つまり、1本線のループは、 $-2$  という単なる数字になる。

ここで注目すべきなのは、この値が負の値であるという点である。通常は、Kronecher  $\delta$  のトレースを取ると、その次元  $n$  が出てくる。バイノール表現では、トレースを取る、つまり上付き添え字と下付き添え字を揃えて和を取ることは、それらを曲線で結ぶことで得られる。そのとき、 $\delta$  に対応する縦に伸びる線の下を結ぼうとすると、必ず  $\epsilon$  が最低2つは必要になるため、そこで負符号が生じて  $-2$  という値になる。よって、形式的には、バイノールは負の次元を持ったテンソルと考えることもできる。

また、添え字を一つ残らずつないでできる閉じたループが単なる数字になるという性質は、一般的にも成り立つ。それは、テンソルの言葉に戻して考えると、全ての添え字について縮約を取るとただのスカラーになることに対応する。

次に、交差が現れるときに、とても興味深い関係式が得られることを調べる。それは、 $\epsilon$  と  $\delta$  の間に成り立つ恒等式から導かれる。

$$\epsilon_{AC}\epsilon^{BD} = \delta_A^B\delta_C^D - \delta_A^D\delta_C^B \quad (13a)$$

これをバイノール表示すると、

$$\begin{array}{c} B \quad D \\ \cup \\ A \quad C \end{array} + \begin{array}{c} B \quad D \\ \left| \right. \\ A \quad C \end{array} + \begin{array}{c} B \quad D \\ \cap \\ A \quad C \end{array} = 0 \quad (13b)$$

この関係式をバイノール恒等式と呼び、結び目理論における Skein 関係式と呼ばれるものの特別な場合に対応する。この関係は、上で出てきた1本ループの値  $-2$  とともに、バイノール計算のいたるところで必要となり、とても大切な関係式である。その使い方を見るため、具体例を計算してみる。

例として、バイノールの基本的性質の中央の関係を、直接計算によって確



かめることにする。交差をパイノール恒等式によって解消すると、

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \\
 &= - \text{Diagram 4} - (-2) \text{Diagram 5} \\
 &= \text{Diagram 6}
 \end{aligned} \tag{14}$$

ただし、2番目の等号において、1本線のループの値 - 2 を代入した。これにより、自己交差する曲線は、その交差を解消することができる。この結果を用いると、ただちに次の関係が成り立つことが分かる。

$$\text{Diagram 7} = \text{Diagram 8} = \text{Diagram 9} = -2 \tag{15}$$

つまり、1本の線が閉じてループになっている場合、自己交差の仕方や回数に依らず、必ずその値は - 2 になることが示される。

さて、表記を簡単にするため、もう少し記法を導入することにする。n 個の Kronecher  $\delta$  のテンソル積に対応する n 本の線をまとめて、線の横に本数をラベル付けして表す。

$$\left| \begin{array}{c} n \\ \hline \dots \end{array} \right. \tag{16}$$

さらに、このままでは添え字の順番を気にしなければならないので、全ての添え字の並べ替えについての和を取る、つまり、添え字について完全対称化したものを、線に箱を付けて表すことにする。

$$\boxed{\left| \begin{array}{c} n \\ \hline \dots \end{array} \right.} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \delta_{B_{\sigma(1)}}^{A_1} \cdots \delta_{B_{\sigma(n)}}^{A_n} \tag{17}$$

ここで、和は添え字に対する全ての置換について取る。この操作は、n 本の線を束にして、上付き添え字と下付き添え字の全ての並べ方について和を取っていることになる。たとえば、 $n = 2$  の場合、

$$\begin{aligned}
 \boxed{\left| \begin{array}{c} 2 \\ \hline \dots \end{array} \right.} &= \frac{1}{2} \left( \left| \begin{array}{c} 2 \\ \hline \dots \end{array} \right. - \left| \begin{array}{c} 2 \\ \hline \dots \end{array} \right. \right) \\
 &= \left| \begin{array}{c} 2 \\ \hline \dots \end{array} \right. + \frac{1}{2} \text{Diagram 10}
 \end{aligned} \tag{18}$$

また、 $n = 3$  の場合、

$$\begin{aligned}
 \text{---}^3 &= \frac{1}{3!} \left( \begin{array}{c} | | | \\ | \times - \times | \\ \times \times - \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times - \times \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{3!} \left( 6 \begin{array}{c} | | | \\ | | | \end{array} + 4 \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} + 4 \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} + 2 \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} + 2 \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) \tag{19}
 \end{aligned}$$

それぞれ、2番目の等号では、パイノール恒等式により、交差の解消を行った。 $n = 3$  の場合は、交差が9個あるので各々展開して、変形して同じになるものをまとめて整理すると、5種類の互いに移り合えない図式の和としてまとめられる。

これらの例を見れば分かるように、交差1つに対して $(-1)$ の因子が付くので、結局、パイノール表示においては、添え字の対称化は、反対称化として表現されることになる。その反対に、添え字についての反対称化を行うと、パイノールにおいては対称化として現れることになるが、こちらの操作は以後用いることがないので導入はしない。

### 2.3 n本線のループ

$n$ 本の線を束ねて反対称化することができるようになったところで、これにより新しいループを考えることができる。それは、 $n$ 本の線を束ねてから、その上下をつないで得られるループである。 $n = 1$  の場合は、1本の線を反対称化してもそのままなので、その上下をつないでできるものは、ただの1本線のループであり、その値は上で求めた通り $-2$ である。そこで、 $n \geq 2$  の場合を計算してみることにする。

まずは、 $n = 2$  のときを考える。2本線の反対称化はすでに計算してあるので、その上下をつなぐだけでよい。すると、円形または8の字型の1本線のループの組み合わせに帰着することが分かるので、1本線ループのそれぞれに $(-2)$ の値を代入する。

$$\begin{aligned}
 2 \text{---} &= \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 1 \end{array} = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} - \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( (-2)^2 - (-2) \right) = 3 \tag{20}
 \end{aligned}$$

よって、2本線のループは3という値を持つことが分かった。

次に、 $n = 3$  の場合を考える。上の $n = 2$  の場合と同様にして、1本線のループの組み合わせに帰着させられるのだが、ここでは、少しだけ回りくど

く計算してみる。

$$\begin{aligned}
 3 \text{ (circle with 3 lines)} &= \text{ (circle with 2 lines, labeled 1 and 2)} = \text{ (circle with 2 lines, labeled 1 and 2)} \\
 &= \frac{1}{3!} \left( \text{ (circle with 3 lines)} - \text{ (circle with 3 lines)} - \text{ (circle with 3 lines)} + \text{ (circle with 3 lines)} + \text{ (circle with 3 lines)} - \text{ (circle with 3 lines)} \right) \\
 &= \frac{2!}{3!} \text{ (circle with 2 lines)} - \frac{3!-2!}{3!} \text{ (circle with 1 line)} \\
 &= \left( \frac{1}{3} (-2) - \frac{2}{3} \right) \text{ (circle with 2 lines)} = -\frac{4}{3} \times 3 = -4
 \end{aligned}$$

(21)

まず1行目では、3本の線を1本と2本に分け、分けた内の2本の方に余分な反対称化を施す。ただし、すでに反対称化されている2本をさらに反対称化しても何も起こらないので、等号で結ぶことができる。2行目では、中央にあった3本線の反対称化を定義に基づいて展開する。そして3行目では、左に1本線のループが独立するものとそうでないものとに分ける。それぞれの個数を数えると、一番左側が1本線ループになるのは2!通り、それ以外の残りは3!-2!通りある。最後に、4行目では、余分な反対称化を取り除くと、どちらの場合も、2本線のループに帰着する。ゆえに、ここに先程求めた2本線ループの値3を代入すると、3本線ループの値は-4と求まる。

では、一般のnの場合にループの値を求めるため、上でn=3の場合に1本だけ線の少ないループに帰着させた方法を一般化させて、漸化式を作ること考える。先程と同様に、n本線の束を1本とn-1本とに分け、n-1本の方に余分な反対称化を行う。次に、真ん中のn本の対称化を展開したときに、一番左に1本線ループができるものとそうでないものとの数を数える。

そのため、反対称化装置の箱の中でどのようなつなぎ換えが起こるのかを、箱の中を拡大した図を用いて説明する。箱の上と下からはn本の線が出ていて、線が箱とつながる場所を端子と呼ぶことにする。すると、箱の上下にはそれぞれn個の端子が並んでいることになるので、それらに対して上下それぞれ左から順番に1~nと番号を振って区別する。また、図では省略してあるが、箱の外側は、上下の同じ番号の付いた端子がそれぞれ線で結ばれていることに注意する。

まず、一番左に1本線のループができるのは、箱の中で上下の1番の端子を結んだ場合で、それを図1の(a)に示す。このように左端を縦につなぐと、箱の外側では上下の1番の端子がつながっているので、左側に1本線のループが作られる。そこで、このような場合の数を考えると、今つないだものを除くと、上下にそれぞれn-1個の端子が残っているので、それらのつ

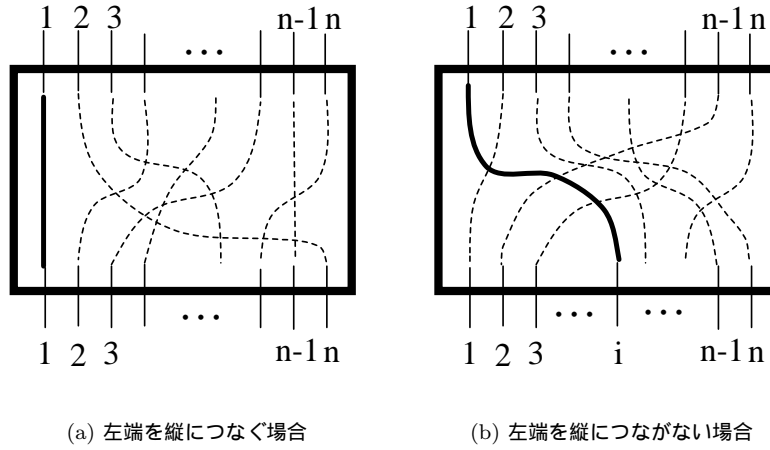


図 1: 反対称化装置の箱の中を拡大した図

なぎ方を数えればよい。それは、単純に  $n-1$  個の順列なので、 $(n-1)!$  通りである。

次に、左側に 1 本線のループが独立してしまわず、8 の字型になる場合を考える。これは、上の 1 番の端子を下の  $i \neq 1$  となる  $i$  番目の端子と箱の中で結んだ場合であり、これを図 1 の (b) に示す。すなわち、上下それぞれの 1 番端子を結びさえしなればよい。よって、まず上の 1 番端子を結べる下の  $i$  番端子は、 $2 \leq i \leq n$  を満たすので、 $n-1$  通りの可能性がある。また、 $i$  を固定して、上の 1 番端子と下の  $i$  番端子を結んでしまうと、上下に  $n-1$  個ずつの端子が残るので、残ったこれらのつながり方は、 $(n-1)!$  通りとなる。従って、全ての場合の数は、今出て来た 2 つの積  $(n-1)(n-1)!$  となる。念のため確認しておく、これは (a) の場合の余事象になっているはずで、確かに、 $n! - (n-1)! = (n-1)(n-1)!$  となって、全事象  $n!$  から (a) の場合の数を引いた残りに一致する。

ここまでの準備の下、 $n$  本の反対称化を行う際、(a) は  $(n-1)!$ 、(b) は  $(n-1)(n-1)!$  だけ状態が現れることに注意してバイノール計算をすると、

$$\begin{aligned}
n \text{ loop} &= \text{1 loop} \text{ n-1 loop} = \text{1 loop} \text{ n-1 loop} \\
&= \frac{1}{n!} \left( (n-1)! \text{ loop} \text{ n-1 loop} - (n-1)(n-1)! \text{ loop} \text{ n-2 loop} \right) \\
&= \frac{1}{n} (-2) \text{ loop} \text{ n-1 loop} - \frac{n-1}{n} \text{ loop} \text{ n-1 loop} \\
&= -\frac{n+1}{n} \text{ loop} \text{ n-1 loop}
\end{aligned}
\tag{22}$$

これにより、 $n$ 本線のループの値に関する漸化式が求められた。ここで、 $n$ 本線のループの値は今後も頻繁に現れる重要な値なので、これを  $\Delta_n$  と表すことにする。

さて、この漸化式は簡単に解くことができ、

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= -\frac{n+1}{n} \Delta_{n-1} = \left(-\frac{n+1}{n}\right) \left(-\frac{n}{n-1}\right) \Delta_{n-2} \\
&= \left(-\frac{n+1}{n}\right) \left(-\frac{n}{n-1}\right) \cdots \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \Delta_1 \\
&= (-1)^n (n+1)
\end{aligned}
\tag{23}$$

ここで、最後の変形において、1本線ループの値  $\Delta_1 = -2$  を用いた。

## 2.4 Temperley-Lieb 代数

$n$ 本のひもが互いに絡み合っているものを組みひもと呼び、それが物理的な実在するひもであれば、それぞれのひもの始点と終点が固定されていれば、ひもを適当に変形してそのもつれが全て解けるとは限らない。しかし、今考えているのは、そのひもを平面上に射影したひもの影の線であり、ひもが上で交差するか下で交差するかの違いは区別されずに同じ交差として表される。

さらに、交差はパイノール恒等式を用いれば解消することができるので、結局、ここで考える  $n$ 本の線が互いに絡み合った組み“線”は、全ての交差を解くことができる。そうして得られる交差のない  $n$ 本線は、全ての線がまっすぐな  $1_n$  と、基本要素  $U_1, U_2, \dots, U_{n-1} \in T_n$  の組み合わせとして表現できる。そこで、それらのなす構造である Temperley-Lieb 代数  $T_n$  を調べる。

ここで、 $U_i$  は、 $n$ 個の始点と  $n$ 個の終点を持ち、 $i$ 番目の始点が  $i+1$ 番目の始点と、 $i$ 番目の終点が  $i+1$ 番目の終点とつながっている一方、 $k \neq i, i+1$  となる  $k$ 番目の始点は  $k$ 番目の終点とつながっているような線の束を表すものとする。ただし、線を縦方向に並べた場合、便宜的に上を始点、下を終点

と呼ぶものとする。具体的な形を見た方が分かりやすいので、 $n = 4$  の場合の単位元  $1_4$  と  $T_4$  の基本要素を示す。

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|l} \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|l} \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|l} \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \end{array} \\
 1_4 & U_1 & U_2 & U_3
 \end{array} \tag{24}$$

次に、これらの要素の積を、1番目の図形の終点と2番目の図形の始点とを接続することによって定義する。すると、 $U_i$  の積に関して、次の3つの性質を満たすことが分かる。

- (I)  $U_i^2 = dU_i$
- (II)  $U_i U_{i\pm 1} U_i = U_i$
- (III)  $U_i U_j = U_j U_i \quad (|i - j| > 1)$

ここで、 $d$  は1本線のループの値で、パイノールの場合、 $d = \Delta_1 = -2$  となる。これらがなす代数を Temperley-Lieb 代数と呼ぶ。

$U_i$  の積の性質を、 $T_4$  の場合に確かめる。3つの基本要素  $U_1, U_2, U_3 \in T_4$  に対して、これらの間の関係を調べると、

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|l} \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|l} \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|l} \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \end{array} \\
 U_1^2 & = & dU_1 \quad U_2^2 = dU_2 \quad U_3^2 = dU_3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|l} \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|l} \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|l} \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \cup \\ \hline \cap \\ \hline \end{array} \\
 U_1 U_2 U_1 & = & U_1 \quad U_2 U_3 U_2 = U_2 \quad U_1 U_3 = U_3 U_1
 \end{array} \tag{25}$$

積を計算するため複数の図式をそのまま上下に接続すると、もともとの図式と高さが異なってしまい、比較しづらいので、高さが同じになるように上下に縮小して調節してある。ここではトポロジー的な変形が許されるので、

そもそも長さという概念が意味をなさないので、伸縮は関係がないことに注意する。

さてここで、やや唐突ではあるが、以下の漸化式により帰納的に導かれる作用素  $f_i \in T_n$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) を定義する。

$$\begin{cases} f_0 = \mathbf{1}_n \\ f_{k+1} = f_k - \mu_{k+1} f_k U_{k+1} f_k \end{cases} \quad (26)$$

ここに、 $\mu_k = -\frac{k}{k+1}$  である。このように作った作用素  $f_i \in T_n$  は、

$$(a) f_i^2 = f_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$(b) f_i U_j = U_j f_i = 0 \quad (j \geq i)$$

のように、冪等性を持ち、また、 $j \geq i$  を満たす  $U_j$  に作用するとゼロになるなど、いくつかの性質を満たすことが知られている。

しかし、重要なのは、これよりもさらに限定した、以下のような性質を満たす  $f \in T_n$  が唯一存在することである！

$$(i) f^2 = f$$

$$(ii) f U_i = U_i f = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

このように、冪等であり、かつ、全ての  $U_i \in T_n$  に作用してゼロになる  $f$  を射影作用素と呼ぶ。ここでは、その存在を仮定し、唯一性をまず示す。その後で実際に  $f$  を構成してみせることで、その存在を確かめる。

$g$  もまた (i)、(ii) を満たすとする。 $g \in T_n$  より、 $g$  は基本要素  $\mathbf{1}_n, U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$  を組み合わせた積の線形和である。ところで、 $g^2 = g$  であるから、 $gU = 0$  を満たす要素の積の和  $U$  を用いて、 $g = \mathbf{1}_n + U$  と書ける。ここで、 $U$  の各項には、ある  $i$  に対する  $U_i$  が少なくとも1つは含まれていることを用いた。さらに、同様の議論により、 $f = \mathbf{1}_n + U'$  と書ける。従って、

$$\begin{aligned} g &= g + gU' = g(\mathbf{1}_n + U') = gf \\ &= (\mathbf{1}_n + U)f = f + Uf = f \end{aligned} \quad (27)$$

従って、 $f$  の唯一性が示された。

では、 $f$  を実際に探すことにするが、その前に  $f_n$  の例をまだ見ていなかったなので、それを漸化式を用いて導出してみる。そこで、 $f_1 \in T_2$  を計算してみると、

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 - \mu_0 f_0 U_1 f_0 \\ &= \mathbf{1}_2 + \frac{1}{2} U_1 \end{aligned}$$

$$= \left| \right| + \frac{1}{2} \cup \cap \quad (28)$$

また、 $f_2 \in T_3$  については、

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 - \mu_2 f_1 U_2 f_1 \\ &= \mathbf{1}_3 + \frac{1}{2} U_1 + \frac{2}{3} (\mathbf{1}_3 + \frac{1}{2} U_1) U_2 (\mathbf{1}_3 + \frac{1}{2} U_1) \\ &= \left| \right| + \frac{1}{2} \cup \cap + \frac{2}{3} \left( \left| \right| + \frac{1}{2} \cup \cap \right) \cup \cap \left( \left| \right| + \frac{1}{2} \cup \cap \right) \\ &= \left| \right| + \frac{1}{2} \cup \cap + \frac{2}{3} \left( \cup \cap + \frac{1}{2} \cup \cap \cup \cap + \frac{1}{2} \cup \cap \cup \cap + \frac{1}{2} \cup \cap \cup \cap \right) \\ &= \left| \right| + \frac{2}{3} \cup \cap + \frac{2}{3} \left( \cup \cap + \frac{1}{3} \cup \cap \cup \cap + \frac{1}{3} \cup \cap \cup \cap \right) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで気付くことは、 $f_1 \in T_2$  が 2 本線の反対称化で、 $f_2 \in T_3$  が 3 本線の反対称化の結果と一致していることである。これは偶然の一致ではなく、実は一般の場合にも当てはまり、 $f_{n-1} \in T_n$  に対して、

$$f_{n-1} = \begin{array}{c} | \\ \mathbf{n} \\ \hline | \end{array} \quad (30)$$

が成り立ち、このように構成された  $f$  のことを、Temperley-Lieb 代数  $T_n$  における Jones-Wenzl projector と呼ぶ。実際にこれが成立していることを示すには、反対称な  $n$  本線の束が、 $f$  の備えるべき 2 つの条件を満たしているか確かめればよい。

1 つ目の条件 (i) を図式で表現すると、

$$\begin{array}{c} | \\ \mathbf{n} \\ \hline \hline | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \mathbf{n} \\ \hline | \end{array} \quad (31)$$

これは、反対称なものを、さらに反対称化しても、反対称であることに変わりはないということで、ほぼ自明な関係式である。これをより一般化すると、

$$\begin{array}{c} | \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \\ \hline \hline | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \\ \hline | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \mathbf{a+b+c} \\ \hline | \end{array} \quad (32)$$



を得る。これは、反対称化してあるものの一部をさらに反対称化しても変化がない、と理解できる。

また、2つ目の条件 (ii) に対応する図式は、

$$\begin{array}{c} 1 \quad i \quad i+1 \quad n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{array} = \begin{array}{c} 1 \quad i \quad i+1 \quad n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{array} = 0 \tag{33}$$

こちらは、反対称化装置の箱の上(または下)の  $i$  番目の端子と  $i+1$  番目の端子を、箱の外で線で結んでいるので、これは、 $i$  番目の添え字と  $i+1$  番目の添え字を同じにして、縮約していることを意味する。ここで、完全反対称テンソルにおいて、2つの添え字が同じような成分は必ずゼロになるので、今考えている図式もゼロとなる。

これは、テンソルの言葉に翻訳せずに、パイノールの計算としても理解できる。余分な反対称化の箱を挿入し、それを展開すると、

$$\begin{array}{c} \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \end{array} = \begin{array}{c} \dots \quad \dots \\ \hline \hline \dots \quad \dots \end{array} = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \end{array} - \begin{array}{c} \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \end{array} \right) \\ = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \end{array} - \begin{array}{c} \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \end{array} \right) = 0$$

ここで、3番目の等号で、自己交差は解消できるというパイノール表現の基本性質を用いた。この結果は、反対称化装置の箱から出た線が再び箱に戻って来る場合、すなわち、Temperley-Lieb 代数の用語で言い換えれば、 $f_{n-1}$  に  $U_i \in T_n$  をつなげると、それは必ずゼロになることが分かる。以上により、 $n$  本線の反対称化装置は条件 (i)、(ii) を満たすので射影作用素  $f$  であり、かつ、 $f_{n-1}$  に等しいことが分かった。

## 2.5 $n$ 本線ループの値 $\Delta_n$ の別導出

ここでは、以前求めた  $n$  本線ループの値  $\Delta_n$  を、Temperley-Lieb 代数の観点から捉え直し、別の算出方法を考える。それは、 $f_n$  を導入する際に用いた漸化式の中で天下一的に与えた係数  $\mu_n$  を求めることと関係している。そのことをこれから調べて行く。

まず、 $f$  の唯一性により、 $\begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \bigcirc \\ | \\ 1 \end{array}$  は  $\begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array}$  に比例するはずである。そこで、 $\begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \bigcirc \\ | \\ 1 \end{array} = x \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array}$  のように、ある係数  $x$  を用いて表せる。しかし、この両辺それぞれの上端と下端を結ぶと、 $\begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \bigcirc \\ | \\ 1 \end{array} = x \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \bigcirc \\ | \\ 1 \end{array}$  すなわち、 $\Delta_{n+1} = x\Delta_n$  である。ゆえに、 $x = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$  となり、

$$\begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \bigcirc \\ | \\ 1 \end{array} = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array} \quad (34)$$

さて、 $f_n$  を定義する漸化式における係数がまだ分かっていないとして、それを  $y$  と置くと、

$$\begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 1 \end{array} + y \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 1 \end{array} \quad (35a)$$

すると、両辺に右から  $U_{n+1}$  を掛けると、

$$\begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 1 \end{array} + y \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \bigcirc \\ | \\ 1 \end{array}$$

ここで、左辺は反対称化装置から出てまた後戻りする線が存在するので、ゼロである。一方、右辺に対して、上の関係式を代入すると、

$$0 = \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 1 \end{array} + y \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 1 \end{array}$$

右辺第2項の下の箱は用をなさないの外せて、ゆえに、 $y = -\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}$  と求まる。従って、この結果を図式で表現すると、

$$\begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 1 \end{array} - \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \begin{array}{c} n \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 1 \end{array} \quad (35b)$$

これは、 $\mu_n = -y$  とした場合の  $f_{n+1}$  を求める漸化式である。すなわち、 $\mu_n$  には、 $\mu_n = -\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}$  という意味合いがあったことが分かる。さて、この両辺の上端と下端をそれぞれ結ぶと、どの項も全て  $\Delta$  で表され、

$$\Delta_{n+2} = -2\Delta_{n+1} - \Delta_n, \quad (\Delta_0 = 1, \Delta_{-1} = 0) \quad (36)$$

という隣接3項間の漸化式を得る。(  $n = -1, 0$  のときの  $\Delta$  の値は、便宜的に導入した。)

この漸化式を解くことにする。特性方程式  $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2 = 0$  を解くと  $\alpha = -1$  と重解を持つので、これを利用して、まず漸化式を変形すると、

$$\begin{aligned} \Delta_{n+2} + \Delta_{n+1} &= -(\Delta_{n+1} + \Delta_n) \\ &= \cdots = (-1)^{n+2}(\Delta_0 + \Delta_{-1}) \\ &= (-1)^{n+2} \\ \therefore \Delta_{n+1} + \Delta_n &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

よって、隣接2項間の漸化式  $\Delta_{n+1} = -\Delta_n + (-1)^{n+1}$  に落とせた。次に、この両辺を  $(-1)^{n+1}$  で割ると、

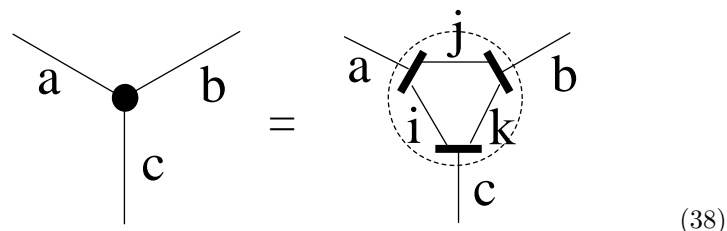
$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{n+1}}{(-1)^{n+1}} &= \frac{\Delta_n}{(-1)^n} + 1 = \frac{\Delta_{n-1}}{(-1)^{n-1}} + 2 \\ &= \cdots = \frac{\Delta_0}{(-1)^0} + n + 1 \\ &= n + 2 \\ \therefore \Delta_n &= (-1)^n(n + 1) \end{aligned} \quad (37)$$

よって、違う方法で既に求めた値と一致することが確かめられた。さらに、 $\mu_n = -y = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$  により、先に導入した係数  $\mu_n$  を決定することもできた。

## 2.6 頂点

ここまでで、 $n$ 本の線を束ねる操作が行えるようになったので、これを組み合わせて頂点を導入する。 $n$ 本の線をまとめて1本の線で表し、それに  $n$  とラベル付けしたものをグラフ理論の用語を援用して、辺と呼ぶことにする。そして、複数の辺が接続される点を頂点呼ぶ。そこで、ここでは3つの辺が1点で集まるような3個の頂点を、内部に3つの辺を付け足し、それらの間

を反対称化してつないだもので定義する。



ここで、破線で囲まれた円は、頂点を拡大してその中がどのようなになっているかを表している。新たに加わる内部の3辺それぞれの本数は、頂点を構成する線の本数  $a, b, c$  が過不足なく分配されるように、

$$a = i + j, b = j + k, c = k + i \quad (39a)$$

を満たすように決定される。これを逆に解くと、一意的に内部の線の本数が決まり、

$$i = \frac{a + c - b}{2}, j = \frac{a + b - c}{2}, k = \frac{b + c - a}{2} \quad (39b)$$

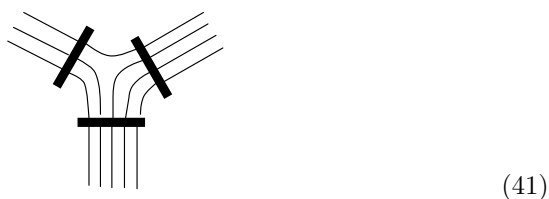
となる。逆に言えば、この内部の線の本数  $i, j, k \in \mathbb{N}$  が存在するような  $a, b, c$  の組み合わせの場合しか、頂点を構成できないと考えることにする。

すると、頂点の成立条件は、まず、 $i, j, k \geq 0$  という要請により、

$$a + b \geq c, b + c \geq a, c + a \geq b \quad (40)$$

という不等式が必要となる。また、3辺の和は  $a + b + c = 2(i + j + k)$  により必ず偶数でなければならないので、合わせて2つの条件が必要である。このことを、具体例で見てみる。

$(a, b, c) = (3, 4, 5)$  の場合、



たとえば、左上から来ている3本が1本と2本に分かれて右上と下へ行っているが、その他にも右上と下とを結ぶ3本の線があるので、左上の本数は、右上と下の本数の合計を超えることはない。よって、ある辺の線の本数は、他の2辺の本数の和を超えない。また、ある辺から出発した線は、残りの2辺のどちらかに必ず行き着くので、頂点に対して、線には入り口と出口が必ず両方存在する。よって、3辺の線の本数の和は、線の入り口と出口の数を全て足し合わせたものなので、必然的に偶数となる。従って、頂点の成立条件が直感的にも理解できる。

これらの条件は、量子力学における角運動量の合成則に現れる条件と同じであるため、Penroseはこの図式をスピネットワークと名付けた。スピントの関連は後の章で詳しく調べることにする。これ以後、図式に頂点が現れたときには、このような内部構造が備わっているものとする。また、2本の辺を結ぶ頂点の場合は、内部の辺のどれかが0本であるとする。これによって、3個の頂点と見なすことができる。一方、4本以上の辺が1点に集まるような4個以上の頂点については考えないことにする。4個以上の頂点は、必ず3個の頂点に分解できるので、その点を心配する必要はない。

## 2.7 頂点の“ひねり”とλ移動

頂点を導入したことで可能となる基本的な変形として、“ひねり”の操作がある。それは、頂点をなす3辺のうち2辺の位置を入れ替えたい場合に必要となる。そのため、“ひねり”を加えた場合の作用を考える。ただし、実際にひねるためには、図式の乗った2次元平面から飛び出して3次元方向への変形を考えることになってしまうため、ひねることに相当する平面上の移動を考えるものとする。“ひねり”を加えた後に交差を解消することもでき、この変形をλ移動と呼ぶこともある。それを、以下で与える。

$$\begin{array}{c} a \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ b \\ | \\ c \end{array} = (-1)^{ab} \lambda_c^{ab} \begin{array}{c} a \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ b \\ | \\ c \end{array} = \lambda_c^{ab} \begin{array}{c} b \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ a \\ | \\ c \end{array} \quad (42)$$

ここで、 $\lambda_c^{ab} = (-1)^{\frac{1}{2}\{a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)\}}$  とする。

これを示す前に、まずn本の線を“ひねる”とはどのような操作かを考える。それは、一方の端を固定して線を適当にねじり、もう片方の端の順番を反対にすることである。すると、線同士の間で交差が生じるので、その結果を×印をつけて表すことにする。たとえば、4本線を“ひねる”と、

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \xrightarrow[180^\circ]{\curvearrowright} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \times \\ | \\ | \\ | \end{array} \quad (43)$$

よって、少なくとも6個の交差ができることになる。

では、一般のn本の線をねじった  $\begin{array}{c} | \\ \times \\ | \\ | \\ | \end{array}^n$  において、いくつ交差が生じてい

るかを数えることにする。

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \\ | & | & \dots & | \\ \hline & & & \end{matrix} \xrightarrow{180^\circ} \begin{matrix} | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{\times} \\ n \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ | & | & \dots & | & \dots & | \\ \hline & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} n & i & 2 & 1 \end{matrix} \quad (44)$$

上端を固定することにして、1番左の線を1番右に持って行くときに  $(n-1)$  個、左から2番目の線を右から2番目に移すのに  $(n-2)$  個、というように、左から  $i$  番目の線を右から  $i$  番目に移動させるためには  $(n-i)$  個の交差が生じる。よってそれらを足し合わせた全交差数  $X(n)$  は、

$$X(n) = \sum_{i=1}^n (n-i) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (45)$$

さらに、 $\begin{matrix} | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{\times} \\ n \end{matrix}$  に反対称化装置の箱をくっつけると、添え字の順番が関係なくなるので、ねじれた線をまっすぐに戻すことができ、交差の解消により因子  $(-1)^{X(n)}$  が付いて、

$$\begin{matrix} | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{\times} \\ n \end{matrix} = (-1)^{X(n)} \begin{matrix} | \\ \hline \end{matrix} n$$

となる。ここまでの準備の下、頂点の“ひねり”を考える。辺  $a, b, c$  の、それぞれ頂点とは反対側の端を固定して、辺  $c$  の方向を軸として  $180^\circ$  回転するのに相当する“ひねり”を考えると、

$$\begin{matrix} a & j & b \\ \diagdown & & / \\ i & & k \\ | \\ c \end{matrix} \xrightarrow{180^\circ} (-1)^{ab} \begin{matrix} a & & b \\ \diagdown & \boxed{\times} & / \\ & j & \\ \diagup & & \diagdown \\ k & & i \\ | \\ c \end{matrix}$$

3辺それぞれがねじれて  $\times$  印が付くのに加え、辺  $a$  と辺  $b$  の交差により別の交差が  $ab$  個生じることになる。また、頂点の内部では、 $i$  と  $k$  の位置が入れ替わるだけで、交差は起きないことに注意する。ここで、 $\times$  印と頂点を構成する反対称化の箱が組み合わさると係数  $(-1)^{X(n)}$  が出て来るので、 $a, b, c$

の3辺それぞれから  $(-1)^{X(a)}$ ,  $(-1)^{X(b)}$ ,  $(-1)^{X(c)}$  の因子が現れる。よって、これらをまとめて、 $\lambda_c^{ab} = (-1)^{X(a)+X(b)+X(c)}$  と置く。また、辺  $a$  と辺  $b$  を移動させて交差をなくすと、 $(-1)^{ab}$  の因子が消えて、

$$\begin{array}{c} a & b \\ \diagdown & / \\ \bullet \\ | \\ c \end{array} = (-1)^{ab} \lambda_c^{ab} \begin{array}{c} a & b \\ \diagdown & / \\ \bullet \\ | \\ c \end{array} = \lambda_c^{ab} \begin{array}{c} b & a \\ \diagdown & / \\ \bullet \\ | \\ c \end{array} \quad (46)$$

となって、頂点に対する“ひねり”と  $\lambda$  移動の公式を得る。

## 2.8 $\theta$ ネット

頂点を含む最も単純な閉じた図式は、頂点が2つのグラフで、その形から  $\theta$  ネットと呼ばれる。

$$\theta(a,b,c) = \begin{array}{c} a \\ \circ \\ b \\ \circ \\ c \end{array} \quad (47)$$

これを、頂点を拡大して、内部の辺を露に書き直すと、6つの反対称化の箱が現れるが、同じ辺に対して箱が2つ付いているのは1つに減らせるので、

$$\begin{array}{c} a & c \\ \circ & \bullet \\ | & | \\ b & \\ \circ & \bullet \end{array} = \begin{array}{c} p \\ \circ \\ m & n \\ \circ \\ a & b & c \end{array} = \begin{array}{c} p \\ \circ \\ m & n \\ \circ \\ a & b & c \end{array} = \text{Net}(m,n,p) \quad (48)$$

となって、3つの箱を持つ  $\text{Net}(m,n,p)$  に変形することができる。ここで、 $m, n, p$  の本数は、それぞれの頂点の成立条件により、 $m = (a+b-c)/2$ ,  $n = (b+c-a)/2$ ,  $p = (c+a-b)/2$  として与えられる。

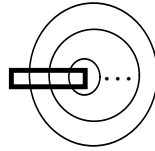
さて、後で必要となるので、このネットワークの値を求めたい。その方法の1つとしては、Temperley-Lieb 代数の射影作用素  $f$  に関する漸化式を用いて、箱を展開して次数を落として行く方法である。その方法も可能ではあるが、 $\Delta_n$  の計算のときに比べてネットワークが複雑になった分、一筋縄では行かない。そこで、ここでは、ネットワークの値を計算する、より巧妙な手法を導入する。それは、彩色法と呼ばれる方法である。

## 2.9 彩色法

彩色法と呼ばれる手法は、線に色と呼ばれるラベル付けを行い、その色付け方を数えることで、閉じたネットワークの値を計算するものである。

まず、ネットワークの各箱を通る線の本数の最大値以上の正の整数  $N$  を用意し、線を  $N$  色で色分けすることにする。そして、それぞれの箱は色の集合を受け取り、入れ替えて伝えるものとする。箱に入った色は必ず出て来るものとする、ネットワークの中には一定色のループが存在することになり、そのループが同じ箱を 2 回以上通ることはないものとする。そのようなループの配置は、各箱における入れ替えの選び方によって決定されることになる。このようなルールに従って、ネットワーク  $G$  の許される色付けの仕方を  $\|G\|(N)$  と表すことにする。また、反対称化の箱の中のつながり方も含めたループの配置を見るときには、反対称化装置を中抜きで表すことにする。

たとえば、 $\Delta_n$  を例にとって考えると、ループの配置としては、



のように、 $n$  個の同心円状に選ぶことが可能であり、これ以外の方法はない。従って、 $n$  個のループがあり、それぞれのループは箱を共有しているので、ループ毎に異なる色を与えようすると、 $N(N-1)\cdots(N-n+1)$  通りの色付けが可能である。しかし、箱には  $n!$  の重複度があるのでそれで割ると、

$$\|\Delta_n\|(N) = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!} = \binom{N}{n}$$

ここで、 $N \rightarrow -2$  とすると面白いことが起こるのでやってみると、

$$\|\Delta_n\|(-2) = \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!} = (-1)^n(n+1)$$

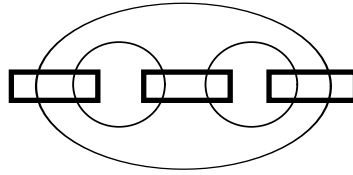
すなわち、 $\|\Delta_n\|(-2) = \Delta_n$  が成り立つ。実はこれは一般のネットワークの場合にも言えて、

$$\|G\|(-2) = G \quad (49)$$

という関係式が成り立つ。ここで、正の整数に対して整数値を与える多項式は、負の整数に対しても必ず整数値を与えることに注意する。従って、正の整数  $N$  による色付け方法の場合の数を数えて、その多項式に対して  $N \rightarrow -2$  とすると、パイノール表現におけるネットワークの値を計算できることになる。これが、彩色法の興味深い性質である。

では、 $\theta$  ネットの計算を彩色法によって行ってみることにする。まず簡単な場合として、 $Net(1, 1, 1)$  を考えると、ループの配置としては、

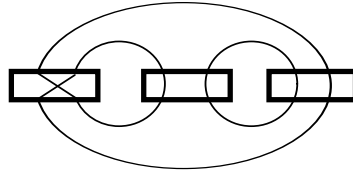




のような配置が妥当であり、どの2つのループも箱を共有しているので、 $N(N-1)(N-2)$ 通りの色付けが可能である。また、各箱に対して $2!$ の重複度を持つのでそれで割ると、結果として、

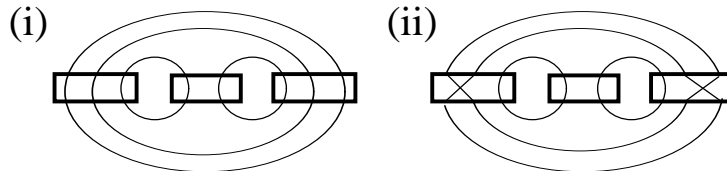
$$\|Net(1, 1, 1)\|(N) = \frac{1}{2!^3} N(N-1)(N-2)$$

となる。この場合、



のようなループの選び方は禁止されることに注意する。なぜなら、大きな方のループが左の箱を2回通っているので、この箱において色の繰り返しが生じてしまうからである。

次に、 $Net(2, 2, 2)$ の場合、



2つのループ配置が存在するが、これらの外側2つのループは、左と右の箱における入れ替えに依存していると考えれば、2本をまとめて1つのループと見なせるので、基本的なループは3つだけである。

以上より、 $Net(m, n, p)$ を正の整数 $N$ で色付けする方法の数は、

$$\|Net(m, n, p)\|(N) = \frac{m!n!p!N(N-1)\cdots(N-m-n-p+1)}{(m+n)!(n+p)!(p+m)!}$$

この式の分母はそれぞれの箱のサイズ $m+n$ ,  $n+p$ ,  $p+m$ に対する重複度であり、分子の $m$ ,  $n$ ,  $p$ は3つのループを構成する辺の本数で、それらの内部の多重度を表す。そして、 $N(N-1)\cdots(N-m-n-p+1)$ は、箱を共有する $m+n+p$ 本の別個のループを色付けする場合の数である。

ここで、 $N \rightarrow -2$  とすると、

$$Net(m, n, p) = \frac{m!n!p!(-1)^{m+n+p}(m+n+p+1)!}{(m+n)!(n+p)!(p+m)!} \quad (50)$$

ゆえに、 $\theta(a, b, c) = Net(m, n, p)$  の値が計算できた。

## 2.10 バブル図式

この節では、パブル図式と呼ばれる図式についての関係式、

$$\begin{array}{c} a \\ | \\ \bullet \\ | \\ c \quad d \\ | \\ \bullet \\ | \\ b \end{array} = \delta_{ab} \left( \frac{\begin{array}{c} a \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ c \quad d \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ a \end{array}}{\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ a \end{array}} \right) \begin{array}{c} a \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ a \end{array} \quad (51)$$

を導く。ただし、右辺の  $\delta$  は、通常の Kronecker の  $\delta$  であり、パイノール表示の線ではないことを注意しておく。

まず、 $a > b$  の場合を考えると、 $a - b (> 0)$  本の線は、上から入って、 $c$  と  $d$  のループを何度か通って、また上に抜けて行くことになる。すると、それらの線は上の頂点を 2 回通ることになり、従って、頂点に含まれる反対称化の箱を一度通ってから、また戻って来て、今度は先程とは反対方向に箱を通ることになる。従って、箱に対してこのような後戻りの線があるので、ネットワークの値はゼロになる。 $a$  と  $b$  を入れ替えても同様の議論が成り立つので、 $a < b$  の場合もゼロとなる。

よって、 $a = b$  の場合を考えると、

$$\begin{array}{c} a \\ | \\ \bullet \\ | \\ c \quad d \\ | \\ \bullet \\ | \\ a \end{array} = \begin{array}{c} a \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ i \quad j \\ | \quad | \\ c \quad d \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ i \quad j \\ | \quad | \\ a \end{array} = \begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ k \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

ここで、頂点の条件により、 $i = (a+c-d)/2$ ,  $j = (a+d-c)/2$ ,  $k = (c+d-a)/2$  で与えられる。これに対して、下に余分な箱を追加すると、

$$\begin{array}{c} a \\ | \\ \bullet \\ | \\ c \quad d \\ | \\ \bullet \\ | \\ a \end{array} = \begin{array}{c} a \\ | \\ \bullet \\ | \\ c \quad d \\ | \\ \bullet \\ | \\ a \\ | \\ \bullet \\ | \\ a \end{array} = \begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ k \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} = z \begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} = z \begin{array}{c} a \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ a \end{array}$$

3つ目の等号で、付け加えた箱に関して後戻りの線があるとゼロとなるので、下から入ってきた線の内、上に抜けるものだけが生き残ることを用いた。よって、この図式の上と下を結びと、

$$c \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} d \ a = z \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array} a$$

よって、係数は  $z = \frac{\theta(a,c,d)}{\Delta_a}$  と求めたので、以上をまとめると、

$$c \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} d = \delta_{ab} \frac{\theta(a,c,d)}{\Delta_a} \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array} a \quad (52)$$

特別な場合として、 $c = 2$ ,  $a = b = d$  のときを計算しておく、

$$\begin{aligned} \theta(a, 2, a) &= \text{Net}(1, 1, a-1) = \frac{1!1!(a-1)!(-1)^{a+1}(a+2)!}{2!a!a!} \\ &= \frac{(-1)^{a+1}(a+2)(a+1)}{2a} \\ \Delta_a &= (-1)^a(a+1) \end{aligned}$$

より、

$$z = \frac{\theta(a, 2, a)}{\Delta_a} = -\frac{a+2}{2a}$$

従って、

$$2 \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} a = -\frac{a+2}{2a} \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array} a \quad (53)$$

を得る。この結果は、後で使うことになる。

### 3 角運動量の表現

数学的には、ラベル付けされた辺と3個の頂点だけからなるグラフに対して、パイノールとの対応付けを行い、頂点の成立条件を課したものをスピンネットワークと呼び、物理的にはスピンの相互作用を表す図式として解釈できる。この章では、量子力学における角運動量をスピンネットワークを用いて表現し、固有値の計算を図式的に行う方法を考える。さらに、角運動量を合成するときに見れるベクトル結合係数をネットワークとして表し、その値を彩色法によって求める。

### 3.1 $|j, m\rangle$ 表現

スピネットワークは、基本的には2つの値を取る添え字の付いた線から構成されているので、2準位系を表すのに用いることが可能なので、直感的には、非相対論的な量子力学の角運動量を合成したり分離する操作を表現できると期待される。それは数学的にも、パイノール表現における反対称化装置が、 $SU(2)$ におけるYoung対称化作用素に対応し、それに図式的な方法を与えていることによって裏付けられる。そこで、角運動量をその大きさ  $j$  と第3成分  $m$  によって分類する  $|j, m\rangle$  表現を、スピネットワークによって構成することを試みる。

まずは、スピン  $\frac{1}{2}$  におけるアップとダウンの2状態を以下のように対応付ける。

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = u^A \sim \begin{matrix} A \\ 1 \end{matrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = d^A \sim \begin{matrix} A \\ 0 \end{matrix} \quad (54)$$

ここで、 $u$  はアップ状態を表し、添え字  $A$  は1の値しか取らない。同様に、 $d$  はダウンの状態を表し、添え字  $A$  は0の値しか取らないことを意味する。すると、各状態の内積は同じ添え字をつなぐことで計算できて、

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right. \right\rangle &= u_A u^A \sim \begin{matrix} 1 \\ A \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} A \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} = 1, \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right. \right\rangle &= d_A d^A \sim \begin{matrix} 0 \\ A \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} A \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} = 1, \\ \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right. \right\rangle &= u_A d^A \sim \begin{matrix} 1 \\ A \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} A \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

よって、規格直交性を表せていることが確かめられる。

次に、このスピン  $\frac{1}{2}$  を組み合わせて、任意の角運動量状態を作りたい。そのような、より高次元の表現は、

$$|j, m\rangle = N_{rs} u^{(A} u^B \dots u^L d^M d^N \dots d^P) \quad (56)$$

のように、 $r$  個のアップと  $s$  個のダウンを全て対称化した積で表せる。ここで、 $r = \frac{j+m}{2}$ ,  $s = \frac{j-m}{2}$  と定義し、規格化定数は  $N_{rs} = (r!s!(r+s)!)^{-\frac{1}{2}}$  である。アップ状態  $u$  に  $\wedge$ 、ダウン状態  $d$  に  $\vee$  という記号を付けて区別することにして、これをパイノールで表現することになると、対称化が反対称化として表されることに注意して、

$$\begin{matrix} \wedge & \wedge & \wedge & \vee & \vee & \vee \\ | & | & | & | & | & | \\ \dots & & \dots & & & \\ \underbrace{\hspace{4em}}_r & & \underbrace{\hspace{4em}}_s & & & \\ & = & \begin{matrix} r+s \\ \wedge \quad \vee \end{matrix} & = & \begin{matrix} r+s \\ \bullet \end{matrix} \end{matrix} \quad (57)$$

$r$  本と  $s$  本の線を束にして反対称化装置の箱を付けたものは、頂点としても表せる。よって、角運動量の状態をスピネットワークで表すことができたので、これに作用する演算子も図式で表現することにする。

角運動量状態は全て、スピン  $\frac{1}{2}$  状態の合成として表されているので、まず、基本となるスピン  $\frac{1}{2}$  から考える。スピン演算子  $\hat{S}_i$  は、

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (58)$$

と表される。ここで、 $\sigma_i$  は以下の Pauli 行列である。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

最初に、 $\sigma_3$  の作用から考えると、

$$\sigma_3 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \sigma_3 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (60a)$$

これを図式的に表現すると、

$$\begin{array}{c} | \\ \square \sigma_3 \\ \wedge \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \wedge \end{array}, \quad \begin{array}{c} | \\ \square \sigma_3 \\ \vee \end{array} = - \begin{array}{c} | \\ \vee \end{array} \quad (60b)$$

よって、 $\sigma_3$  が作用すると、固有値に対応して符合が付くだけで、状態は変わらないという性質がある。固有ケットに作用しているのが、当然の結果である。

また、他の Pauli 行列についても、アップとダウン状態への作用を計算すると、

$$\begin{aligned} \sigma_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ \sigma_1 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \sigma_2 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ \sigma_2 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (61a)$$

よって、これらも図式で表すと、

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_1 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 \\ \sigma_2 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} i \\ -i \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right. \quad (61b)$$

これを見ると分かるように、 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  は、アップとダウンを入れ替える働きをし、いわばスピンを“引っくり返す”操作をする。さらに、 $\sigma_2$  に関しては、状態を交換した上で、 $i$  または  $-i$  という因子が付く。

また、Pauli 行列は全てトレースレスなので、

$$\text{tr}(\sigma_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (62)$$

であることに注意すると、以下のような関係式を得る。

$$\begin{aligned}
 \sigma_3 \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \\ 1 \end{array} &= \sigma_3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} = \sigma_3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} \\
 &= \sigma_3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} + \frac{1}{2} \sigma_3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \end{array}
 \end{aligned}$$

ダウン状態に対しても同様の計算ができるので、

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_3 \\ \sigma_3 \end{array} \right. \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \\ 1 \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right. \quad (63)$$

また、他の全ての Pauli 行列に対しても同様な関係が成り立つ。それらをまとめると、

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{2本線の手を伸ばして、} \\ \text{アップまたはダウン状態を表す線を} \\ \text{“つかみ取る”操作によって記述} \\ \text{されることが分かる。} \end{array} &= \begin{array}{l} \text{↑} \\ \text{↓} \end{array} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{2本線の手を伸ばして、} \\ \text{アップまたはダウン状態を表す線を} \\ \text{“つかみ取る”操作によって記述} \\ \text{されることが分かる。} \end{array} &= \begin{array}{l} \text{↑} \\ \text{↓} \end{array}
 \end{aligned} \tag{64}$$

すなわち、スピン演算子の作用は、この図のように、2本線の“手”を伸ばして、アップまたはダウン状態を表す線を“つかみ取る”操作によって記述されることが分かる。

では次に、この結果を拡張して、角運動量演算子が状態  $|j, m\rangle$  に対してどのように作用をするか考える。角運動量演算子は、

$$\hat{J}_3 = \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^{2j+1} \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes (\sigma_3)_i \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \tag{65}$$

ここで、 $2j+1$  個の  $\mathbf{1}$  の直積の  $i$  番目を Pauli 行列に置き換え、和は  $1 \leq i \leq 2j+1$  について取る。このように  $\sigma_3$  から構成できるので、基本的には、 $j = 1/2$  の場合をそのまま拡張して考えることができる。ただし、違いとしては、先程のスピン  $\frac{1}{2}$  では、演算子から伸びた“手”が“つかみ取る”ことのできる相手の線は1本だけだったのが、一般の  $j$  になると、線の本数が増えることになる。その場合には、それぞれの線を“つかんだ”ものの足し合わせと考える。それを図式で表すとどうなるか調べる。

まず線が2本の場合には、どちらを“つかみ取る”か2通りの選択があるが、右側の線を選んだとすると、

$$\begin{aligned}
 \text{2本線の交差} &= \text{2本線の交差} + \text{2本線の交差} + \text{2本線の交差} + \text{2本線の交差} \\
 &= \text{2本線の交差} = \text{2本線の交差} = \text{2本線の交差}
 \end{aligned}$$

2つの交差を解消すると、全部で4つ項が出て来るが、第2、3、4項目は反対称化の箱から出てUターンして同じ箱に戻る線を含むので全てゼロである。よって、第1項目のみ生き残り、これは“つかむ”ときに左側の線を選

んだ場合と同じ結果になる。さらに、一度頂点を箱で表し、箱をまとめ直すと、1つの頂点のみの形になる。よって、これらを足し合わせると、

$$\begin{array}{c} | \\ \hline 2 \\ \bullet \\ \hline 2 \\ | \end{array} + \begin{array}{c} | \\ \hline 2 \\ \bullet \\ \hline 2 \\ | \end{array} = 2 \begin{array}{c} | \\ \hline 2 \\ \bullet \\ \hline 2 \\ | \end{array} \quad (66)$$

となる。ここで、2本線の“手”が他の線と交差しても、交差の数は必ず偶数なので、全体に掛かる符号は気にしなくてよい。

今示した2本線の場合と同じことが一般にも言えて、 $n$ 本ある中どの線を“つかみ取って”も、 $n$ 本線に2本線の“手”が伸びて来て“つかみ取り”、そこに新たに頂点を作った図式と等しくなる。よって、演算子から伸びてきた“手”の $n$ 本線への作用は、

$$\begin{array}{c} | \\ \hline n \\ \dots \\ \bullet \\ \hline 2 \\ | \end{array} + \begin{array}{c} | \\ \hline n \\ \dots \\ \bullet \\ \hline 2 \\ | \end{array} + \dots + \begin{array}{c} | \\ \hline n \\ \dots \\ \bullet \\ \hline 2 \\ | \end{array} = n \begin{array}{c} | \\ \hline 2 \\ \bullet \\ \hline n \\ | \end{array} \quad (67)$$

つまり、単純に3辺が $(n, n, 2)$ の頂点を新しく作ったものに、 $n$ という因子を掛ければよいことになる。

ここまでの準備により、演算子 $\hat{J}_3$ が状態 $|j, m\rangle$ に及ぼす作用を計算することができて、

$$\begin{aligned}
 \hat{J}_3 |j, m\rangle &\sim \frac{\hbar}{2} \boxed{\sigma_3} \begin{array}{c} | \\ \hline 2 \\ \bullet \\ \hline 2 \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ \hline r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \\ r \quad s \end{array} \\
 &= \frac{\hbar}{2} r \boxed{\sigma_3} \begin{array}{c} | \\ \hline 2 \\ \bullet \\ \hline 2 \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ \hline r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \\ r \quad s \end{array} + \frac{\hbar}{2} s \boxed{\sigma_3} \begin{array}{c} | \\ \hline 2 \\ \bullet \\ \hline 2 \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ \hline r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \\ r \quad s \end{array} \\
 &= \hbar \frac{r-s}{2} \begin{array}{c} | \\ \hline r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \\ r \quad s \end{array} \sim \hbar m |j, m\rangle \quad (68)
 \end{aligned}$$

となって確かに、状態 $|j, m\rangle$ が $\hat{J}_3$ の固有状態であり、その固有値が $\hbar m$ であるという結果を導いた。

次に、昇降演算子 $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ を導入して、これらの作用を考える。ま



ず、上昇演算子  $\hat{J}_+$  を状態に作用させると、

$$\begin{aligned}
\hat{J}_+ |j, m\rangle &\sim \frac{\hbar}{2} \left( \boxed{\sigma_1} \bullet \text{---} 2 \bullet + i \boxed{\sigma_2} \bullet \text{---} 2 \bullet \right) \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \\
&= \frac{\hbar}{2} \left( r \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + s \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \right) \\
&+ i \frac{\hbar}{2} \left( r \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + s \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \right) \\
&= \frac{\hbar}{2} \left( r \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + s \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \right) + i \frac{\hbar}{2} \left( ir \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} - is \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \right) \\
&= \hbar s \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \quad (69)
\end{aligned}$$

よって、因子  $\hbar s$  を出し、アップ状態を1つ増やし、ダウン状態を1つ減らした状態となる。この結果に引き続き下降演算子  $\hat{J}_-$  を作用させると、

$$\begin{aligned}
\hat{J}_- \hat{J}_+ |j, m\rangle &\sim \frac{\hbar}{2} \left( \boxed{\sigma_1} \bullet \text{---} 2 \bullet - i \boxed{\sigma_2} \bullet \text{---} 2 \bullet \right) \hbar s \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \\
&= \frac{\hbar^2}{2} s \left[ \left\{ (r+1) \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + (s-1) \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \right\} \right. \\
&- i \left. \left\{ (r+1) \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + (s-1) \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \right\} \right] \\
&= \frac{\hbar^2}{2} s \left[ \left\{ (r+1) \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + (s-1) \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \right\} \right. \\
&- i \left. \left\{ i(r+1) \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + (-i)(s-1) \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \right\} \right] \\
&= \hbar^2 s(r+1) \begin{array}{c} |r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \sim \hbar^2 s(r+1) |j, m\rangle \quad (70)
\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{J}_- \hat{J}_+ |j, m\rangle = \hbar^2 s(r+1) |j, m\rangle \quad (71)$$

この両辺それぞれに対して、 $\langle j, m|$  と内積を取ると、 $\hat{J}_-$  が  $\hat{J}_+$  のエルミート共役であることより、

$$|\hat{J}_+ |j, m\rangle|^2 = \hbar^2 s(r+1)$$

従って、次のような規格化定数を選べばよいことが分かる。

$$\hat{J}_+ |j, m\rangle = \hbar \sqrt{s(r+1)} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m\rangle \quad (72)$$

ここで、線の本数を数えてみると、 $0 \leq r, s \leq r+s = 2j$  という関係が成り立つことに気付く。これを  $j, m$  に直して考えてみると、 $0 \leq j \pm m \leq 2j$ 、すなわちこれは  $-m \leq j \leq m$  という条件に他ならない。よって、パイノール表示においては、この関係が自動的に満たされていることに注意しておく。

最後に、演算子  $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$  についても同じ方法で、状態への作用を調べることができて、

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 |j, m\rangle &= (\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2) |j, m\rangle \\ &\sim \frac{\hbar}{2} \left[ \sigma_3 \right] \cdot 2 \cdot \frac{\hbar}{2} \left( r \begin{array}{c} | \\ r-1 \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} + s \begin{array}{c} | \\ r+1 \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} \right) \\ &\quad + \frac{\hbar}{2} \left[ \sigma_2 \right] \cdot 2 \cdot \frac{\hbar}{2} \left( ir \begin{array}{c} | \\ r-1 \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} - is \begin{array}{c} | \\ r+1 \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} \right) \\ &\quad + \frac{\hbar}{2} \left[ \sigma_3 \right] \cdot 2 \cdot \frac{\hbar}{2} (r-s) \begin{array}{c} | \\ r \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \left\{ r(r-1) \begin{array}{c} | \\ r-2 \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} + r(s+1) \begin{array}{c} | \\ r \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} + s(r+1) \begin{array}{c} | \\ r \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} \right. \\ &\quad + s(s-1) \begin{array}{c} | \\ r+2 \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} - r(r-1) \begin{array}{c} | \\ r-2 \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} + r(s+1) \begin{array}{c} | \\ r \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} \\ &\quad \left. + s(r+1) \begin{array}{c} | \\ r \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} - s(s-1) \begin{array}{c} | \\ r+2 \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} + (r-s)^2 \begin{array}{c} | \\ r \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} \right\} \\ &= \frac{\hbar^2}{4} (r^2 + s^2 + 4rs + 2r + 2s) \begin{array}{c} | \\ r \quad r+s \\ \otimes \quad \oplus \end{array} \\ &\sim \hbar^2 \frac{r+s}{2} \left( \frac{r+s}{2} + 1 \right) |j, m\rangle \quad (73) \end{aligned}$$

$r$  や  $s$  が増えたり減ったりした項は全てキャンセルして、最終的に元と同じ状態に戻る項のみが残ることになる。この結果を、 $j, m$  に書き直すと、

$$\hat{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \quad (74)$$

という見慣れた形を再導出できた。

ところで、この演算子は  $\hat{J}^2 = \frac{\hbar^2}{4} \sum_{i=1}^3 \hat{\sigma}_i^2$  と表せるので、実は Pauli 行列のある性質を用いると、計算が楽になることが分かる。それを次の節で調べる。

### 3.2 Pauli 行列の性質

Pauli 行列 (テンソル) を 2 つ掛け合わせると、

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_{iA}^B \sigma_{iC}^D = 2 \begin{array}{c} B \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ A \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \\ C \end{array} \begin{array}{c} D \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ C \end{array} \quad (75)$$

という性質がある。これを直接成分を計算することで確かめる。各添え字は 0 と 1 の 2 つの値を取るため、全部で  $2^4 = 16$  成分あるため、 $4 \times 4$  行列で表すことにすると、

$$\sigma_{1A}^B \sigma_{1C}^D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同様にして、

$$\sigma_{2A}^B \sigma_{2C}^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{3A}^B \sigma_{3C}^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって、全部足し合わせると、

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_{iA}^B \sigma_{iC}^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に、求めたい式の右辺の図式の頂点を反対称化の箱に分解して、展開すると、

$$\begin{aligned} 2 \begin{array}{c} B \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ A \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \\ C \end{array} \begin{array}{c} D \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ C \end{array} &= 2 \begin{array}{c} B \quad D \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \quad C \end{array} \\ &= - \begin{array}{c} B \quad D \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \quad C \end{array} + \begin{array}{c} D \quad B \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad C \end{array} \\ &= \begin{array}{c} D \quad B \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad C \end{array} + \begin{array}{c} B \quad D \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \quad C \end{array} \end{aligned}$$

すなわち、

$$2 \begin{array}{c} B \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ A \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \\ C \end{array} \begin{array}{c} D \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ C \end{array} = \delta_A^D \delta_c^B + \tilde{\epsilon}_{AC} \tilde{\epsilon}^{BD} \quad (76)$$

となって、 $\delta$  の積と  $\tilde{\epsilon}$  の積で表せることが分かる。この各項を計算すると、添え字の付き方に気を付け、成分を行列で表示するときに先程の配置と統一すると、

$$\delta_A^D \delta_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\epsilon}_{AC} \tilde{\epsilon}^{BD} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、両者を足し合わせると、

$$\delta_A^D \delta_C^B + \tilde{\epsilon}_{AC} \tilde{\epsilon}^{BD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

従って、確かに  $\sigma_i^2$  の和と一致するので、題意は示された。ここで、右の図式に対して、左側の頂点に関して“ひねり”を加え、それから交差を解消する  $\lambda$  移動を施すと、

と変形することができる。また、 $\sigma_{iA}^B$  などとも図式として表現し、2つの  $\sigma$  を縦に並べて描くことにすると、

$$\sum_{i=1}^3 \begin{array}{c} \boxed{\sigma_i} \\ \uparrow \\ \text{B} \\ \downarrow \\ \text{A} \\ \downarrow \\ \boxed{\sigma_i} \\ \uparrow \\ \text{D} \\ \downarrow \\ \text{C} \end{array} = -2 \begin{array}{c} \text{B} \\ \downarrow \\ \text{A} \\ \downarrow \\ \text{D} \\ \downarrow \\ \text{C} \end{array} \quad (77)$$

さらに、スピン演算子の作用を思い出すと、 $\sigma$  の上と下を結んでそこから2本線の“手”を伸ばしたもので表されるのだったから、この場合、2つの  $\sigma$  に対して、それぞれから2本線の“手”を伸ばしてみると、

となって、反対称化したただの2本線となる。ただし、これが作用するときには、“手”が伸びて線を“つかみ取って”そこに頂点を形成するとき、その中に反対称化の箱も同時に作られるので、そのことを含意した上で、箱は省略することができて、結局、

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \begin{array}{c} \boxed{\sigma_i} \cdot 2 \\ \boxed{\sigma_i} \cdot 2 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \end{array} \quad (78)$$

すなわち、 $\sum \sigma^2$  の作用は、単なる2本線の両端に“手”が付いたものと考えることができる。このとき、2つの“手”は区別されるので、便宜的に上を“左手”、下を“右手”と呼ぶことにする。

以上の性質を用いて、 $\hat{j}^2$  の作用を再び計算すると、

$$\begin{aligned} \hat{j}^2 |j, m\rangle &= \frac{\hbar^2}{4} \sum_{i=1}^3 \hat{\sigma}_i^2 |j, m\rangle \sim -\frac{\hbar^2}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \oplus \quad \ominus \end{array} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2} \left( r^2 \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \oplus \quad \ominus \end{array} + s^2 \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \oplus \quad \ominus \end{array} \right. \\ &\quad \left. + rs \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \oplus \quad \ominus \end{array} + rs \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \oplus \quad \ominus \end{array} \right) \quad (79) \end{aligned}$$

2本の“手”が $r$ の辺と $s$ の辺のどれを“つかみ取る”かによって、4通りの可能性がある。つまり、“両手”とも $r$ 、または“両手”とも $s$ の場合と、“左手”が $r$ で“右手”が $s$ 、またはその反対に、“左手”が $s$ で“右手”が $r$ という選択があり得るので、それらが、図式に現れた4つの項に対応する。ここで、この第1項と第2項は、バブル図式が含まれていることに気付けば、係数を計算できる。また、第3項と第4項は、頂点を“ひねる”と同じ図式になって、それをさらに変形すると、

$$\begin{aligned} &\begin{array}{c} 2 \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \oplus \quad \ominus \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \oplus \quad \ominus \end{array} = -2 \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \oplus \quad \ominus \end{array} = -2 \begin{array}{c} r-1 \quad 1 \quad 1 \quad s-1 \\ \text{---} \\ \oplus \quad \ominus \end{array} \\ &= -2 \begin{array}{c} r-1 \quad 1 \quad 1 \quad s-1 \\ \text{---} \\ \oplus \quad \ominus \end{array} = -2 \left( \begin{array}{c} r-1 \quad 1 \quad 1 \quad s-1 \\ \text{---} \\ \oplus \quad \ominus \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} r-1 \quad 1 \quad 1 \quad s-1 \\ \text{---} \\ \oplus \quad \ominus \end{array} \right) \\ &= - \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ \swarrow \quad \searrow \\ \oplus \quad \ominus \end{array} \quad (80) \end{aligned}$$

よって、第3、4項も、元の状態 $|j, m\rangle$ に比例するので、まとめると、

$$\begin{aligned}
\hat{j}^2 |j, m\rangle &\sim -\frac{\hbar^2}{2} \left( r^2 \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ r \quad r \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ r \quad r \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ | \\ \bullet \\ \backslash \\ s \\ \circlearrowright \end{array} + s^2 \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ r \quad s \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ r \quad s \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ s \quad s \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ s \quad s \end{array} - rs \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ r \quad s \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ r \quad s \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ | \\ \bullet \\ \backslash \\ s \\ \circlearrowright \end{array} \right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2} \left\{ r^2 \left( -\frac{r+2}{2r} \right) + s^2 \left( -\frac{s+2}{2s} \right) - rs \right\} \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ r \quad s \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ r \quad s \end{array} \begin{array}{c} r+s \\ | \\ \bullet \\ \backslash \\ s \\ \circlearrowright \end{array} \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \{ r(r+2) + s(s+2) + 2rs \} |j, m\rangle \\
&= \hbar^2 \frac{r+s}{2} \left( \frac{r+s}{2} + 1 \right) |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \tag{81}
\end{aligned}$$

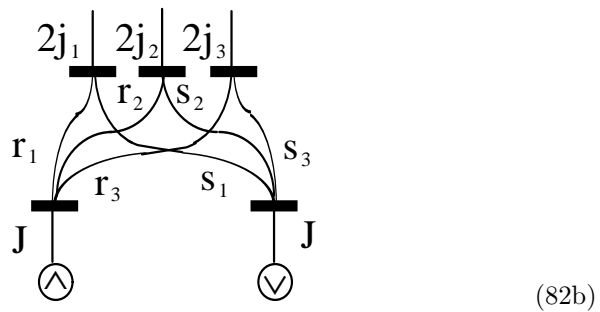
ゆえに、Pauli 行列の性質を用いて、 $\hat{j}^2$  の作用をより簡単に求めることができた。

### 3.3 角運動量の合成

前節では、 $r$  個のアップ状態と  $s$  個のダウン状態を組み合わせて状態  $|j, m\rangle$  を作り上げたが、これも一種の角運動量の合成であった。しかし、より一般の角運動量間の合成を考えるため、3つのスピンを組み合わせてゼロとするような振幅を与える、ベクトル結合係数としての Wigner 係数（あるいは、2つの角運動量を合成して1つの角運動量を作り上げると考えれば、Clebsch-Gordan 係数）を求めなければならない。そこでここでは、3つの状態  $|j_1, m_1\rangle, |j_2, m_2\rangle, |j_3, m_3\rangle$  を組み合わせてゼロとする Wigner 係数

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \right\} \tag{82a}$$

を計算するため、3つの積状態を、



(82b)

のように表し、 $\tilde{\epsilon}$ の曲線を用いてつないで反対称化し、縮約してスカラーにしなければならない。ここで、

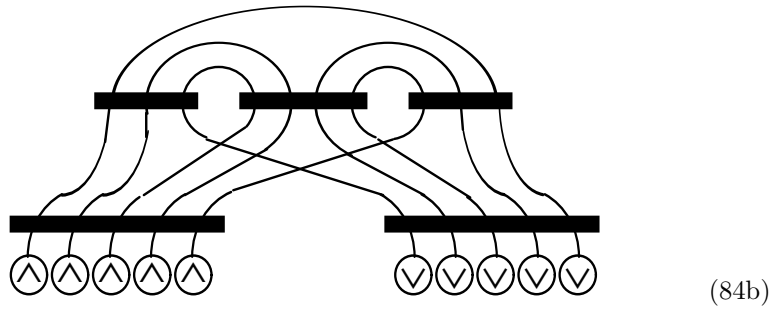
$$j_i = \frac{1}{2}(r_i + s_i), \quad m_i = \frac{1}{2}(r_i - s_i) \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$J = \sum_{i=1}^3 j_i = \sum_{i=1}^3 r_i = \sum_{i=1}^3 s_i, \quad \sum_{i=1}^3 m_i = 0 \quad (83)$$

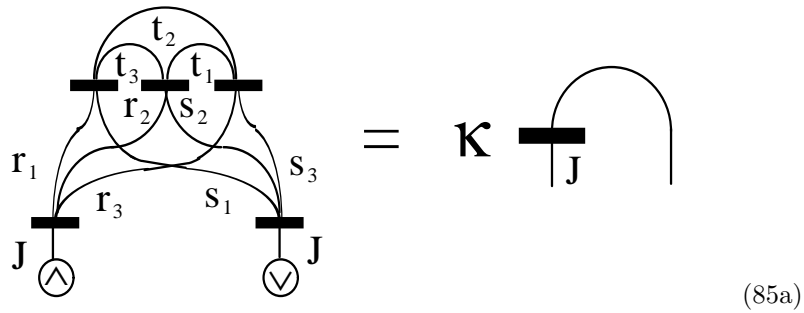
という条件がある。すると、たとえば、ベクトル結合係数

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 3/2 & 2 & 3/2 \\ 1/1 & 0 & -1/2 \end{array} \right\} \quad (84a)$$

に対しては、対応する図式は、



となる。これを一般化して表すと、



ここで、縮約するために線で結ぶときに、左の足がアップ状態につながった $\tilde{\epsilon}_{AB}$ は、必ず右の足はダウン状態とつながなければならない。また、 $t_i$ の本数は $j$ によって、 $t_1 = j_2 + j_3 - j_1$ ,  $t_2 = j_3 + j_1 - j_2$ ,  $t_3 = j_1 + j_2 - j_3$ のように決定される。すると、結合係数の計算は、 $\kappa$ を求めることに帰着し、適当な規格化を施せばよい。さらに、左下のアップの端と右下のダウンの端を

つなぐと、閉じたネットワークにすることができて、

$$(85b)$$

このネットワーク  $G$  の値を計算することで、結合係数  $k$  を求めることができる。そこで、彩色法を用いてこの値を計算することにする。

まず、基本的なループとして、以下の6つが考えられる。

$$(86)$$

それぞれのループを通る線の本数を  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) とする。ここで、 $c_1 = k$  と置くと、全てのループは相互に関係しあっているので、

$$\begin{aligned} c_2 &= t_2 - k, & c_3 &= r_1 - k, & c_4 &= t_3 - r_1 + k, \\ c_5 &= s_3 - k, & c_6 &= t_1 - s_3 + k \end{aligned} \quad (87)$$

となって、残りの5つのループの本数が自動的に決まる。

さて、 $Net(m, n, p)$  に対して彩色法を用いたときと異なり、やや注意が必要なのは、基本ループ同士で交差しているものと、自己交差しているものもあることである。ここで、異なるループ間の交差  $\rho$  とループ同士の箱の中の交差  $\delta$  は、必ず2つセットで現れるので、その総数は偶数である。それぞれの記号で、交差の数を表すことにすると、

$$\rho + \delta = 0 \pmod{2} \quad \therefore \delta = \rho \pmod{2}$$



また、異なるループ間の交差の数  $\rho$  と、ループの自己交差の数  $\epsilon$  を足すと、異なる辺  $t_i$  や  $r_i$ 、 $s_i$  の交差の数  $\sigma$  になるので、

$$\rho + \epsilon = \sigma \quad \therefore \rho = \sigma + \epsilon \pmod{2}$$

ゆえに、2つの条件を合わせると、箱の中でのループ間の交差の数  $\delta$  のパリティが求まり、

$$\delta = \sigma + \epsilon \pmod{2} \quad (88)$$

となる。辺同士の交差は、 $r_2$  と  $s_1$ 、 $r_3$  と  $s_1$ 、 $r_3$  と  $s_2$  の3か所で生じており、それぞれの交差の数は、辺の本数の積に等しいので、

$$\sigma = r_2 s_1 + r_3 s_1 + r_3 s_2 \pmod{2}$$

また、ループの自己交差は、 $c_2$ 、 $c_4$ 、 $c_6$  で生じており、それぞれの交差の数はループの線の本数の2乗になるが、整数  $c_i$  に対して

$$c_i^2 = c_i(c_i - 1) + c_i = c_i \pmod{2}$$

が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned} \epsilon &= c_2^2 + c_4^2 + c_6^2 = c_2 + c_4 + c_6 \pmod{2} \\ &= t_1 + t_2 + t_3 - r_1 - s_3 + k \pmod{2} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、箱の中でのループ間の交差の数  $\delta$  は、

$$\delta = r_2 s_1 + r_3 s_1 + r_3 s_2 + t_1 + t_2 + t_3 - r_1 - s_3 + k \pmod{2} \quad (89)$$

となる。色付けの方法を考える際には、異なるループ同士の箱の中での交差のみが意味を持つので、この  $\delta$  のパリティが重要となる。ループの線の総和を  $J = \sum_j c_j = t_1 + t_2 + t_3$  として、 $\delta - J - k = q$  と置いておく。

ところで、 $N$ 色を6つのループに割り当てる場合の数は、

$$\frac{N!}{c_1!c_2!c_3!c_4!c_5!c_6!(N-J)!}$$

なので、結局、

$$\|G\|(N) = \frac{\prod_{i=1}^3 (r_i!s_i!t_i!)}{\prod_{j=1}^4 b_j!} \sum_k \frac{(-1)^{q+J+k} N(N-1)\cdots(N-J+1)}{k!(t_2-k)!(r_1-k)!(t_3-r_1+k)!(s_3-k)!(t_1-s_3+k)!}$$

ここで、 $k$  についての和は、全てのループに対して  $c_i \geq 0$  を満たす範囲で取る。また、4つの箱を通る線の本数を、

$$b_1 = t_1 + t_2, \quad b_2 = t_2 + t_3, \quad b_3 = t_3 + t_1, \quad b_4 = J \quad (90)$$

と置いた。分子の  $\prod_{i=1}^3 r_i!s_i!t_i!$  は、ループを構成する辺の本数に対する多重度であり、分母の  $\prod_{j=1}^4 b_j!$  は、各箱サイズに対する重複度である。

では、 $N \rightarrow -2$  とすると、 $(-2)(-2-1)\cdots(-2-J+1) = (-1)^J(J+1)!$  であり、 $J = t_1 + t_2 + t_3$  は  $k$  とは独立なので、和の外に出すことができ、

$$G = (-1)^q(J+1) \prod_{i=1}^3 \frac{r_i!s_i!t_i!}{b_i!} \sum_k \frac{(-1)^k}{k!(t_2-k)!(r_1-k)!(t_3-r_1+k)!(s_3-k)!(t_1-s_3+k)!} \quad (91)$$

ここで、 $b_i! = J!$  が約分されて消えていることに注意する。

これでネットワークの値が求まったので、この値を  $\Delta_J = (-1)^J(J+1)$  で割ったものが、求めたかったベクトル結合係数  $\kappa$  になる。従って、

$$\kappa = (-1)^{q-J} \prod_{i=1}^3 \frac{r_i!s_i!t_i!}{b_i!} \sum_k \frac{(-1)^k}{k!(t_2-k)!(r_1-k)!(t_3-r_1+k)!(s_3-k)!(t_1-s_3+k)!} \quad (92)$$

この結果を、 $r, s, t$  を  $j, m$  に書き直せば、Lacah の公式と一致するので、正しい式が求められたことが分かる。ゆえに、ベクトル結合係数をスピネットワークに対して彩色法を用いて計算することができた。

## 4 まとめ

本論ではまず、スピネットワークの基礎となるパイノール表現と呼ばれるものを定義し、トポロジ的な関式変形による計算方法を導入した。ここで、特徴的な関係式であるパイノール恒等式が得られ、また、 $n$ 本線のループの値を求めることで、形式的には負の次元のテンソルを表すことが分かった。次に、パイノール計算と組みひも理論における Temperley-Lieb 代数との関連を調べ、パイノール表示における反対称化の箱が、Jones-Wenzl projector  $f$  の特殊な場合に一致することが示され、それらが密接に関係していることが分かった。その関係性を新たな手掛かりとして、さらに、彩色法と呼ばれる強力な計算手法を導入して、パイノール計算において役に立つ、 $\theta$  ネットの値やいくつかの公式を求め、スピネットワークの基礎付けを行った。

こうして準備が整ったところで、スピネットワークによる、量子力学における角運動量の理論を構築した。すると、一般の状態  $|j, m\rangle$  をスピン  $1/2$  のアップ状態とダウン状態の組み合わせによって表すために、スピネットワークにおける3価の頂点を用いることができることが分かった。そして、角運動量演算子  $\hat{J}_3$  や  $\hat{J}_\pm$  の固有値を図式的に算出した。ここで、角運動量合成が頂点の成立条件と整合していることを確かめた。また、同様に  $\hat{J}^2$  の作用についても求めたが、Pauli 行列の性質を用いると、より簡単に計算できた。最後に、角運動量の合成則に現れるベクトル結合係数である  $3j$  記号をネットワークとして表現し、その値を彩色法を用いて計算した。従って、スピネットワークが角運動量の関式表現を与え、さらに、状態への作用を図式的な変形により求めたり、合成則における結合係数を計算する手法を提供することが分かった。

今回はパイノール計算の基礎付けに重点を置き、表す物理的な対象としては、専ら角運動量の表現に限った。しかし、もともとスピネットワークは、スピンの図式的表現であるだけに止まらず、Penroseはその考えを推し進め、新しい時空の描像として使えないかを探っていた。そして、ネットワークが十分に大きければ、スピネットワークから3次元の角度についての幾何学を構成できることを示した。そこで彼は、時空自体は本質的ではなく、スピンのみが基本的な要素であり、それらの相互作用によって自然とそこから時空が生み出されるのではないかと考えた。しかし、そうして作ることができたのは平坦な幾何のみであり、曲がった時空を作り出す試みは失敗した。

その後、数学の分野で結び目理論が発展すると、パイノール恒等式が結び目理論における Skein 関係式の特殊な場合であり、線の交差に対して上で交差すると下で交差するのを区別しない特別な場合がパイノール表現になることが分かった。そうして、結び目理論や組みひも理論、グラフ理論、群論などの数学の分野との深い関連性が見つかった。

一方、物理の分野では、量子力学と相対論を整合的に扱える理論の構築が望まれ続けており、その有力候補と目されるものに超弦理論がある。しかし、別の試みの一つとしてのループ量子重力理論において、スピネットワークを用いた表現が可能であることが分かり、ここに、Penrose のスピネットワークが再発見された。そして、この理論によれば、時空には最小単位が存在し、面積や体積（時間も？）が離散的になることが予言される。また、ループ量子重力理論の有望な点は、理論に予め“入れ物”としての時空を用意する必要がなく、背景時空独立性があることであり、これは超弦理論にはない特徴である。しかし、この理論はまだ発展途上にあり、解決しなければならない問題も多い。

ところで、今回紹介した、角運動量演算子の状態への作用が、図式的には演算子が“手”を伸ばして線を“つかみ取る”ことによって表せるという事実は、角運動量演算子に類似の、ループ量子重力理論における Area 演算子の作用の計算手法として研究され、見つかったものである。従って、少なくとも確実なのは、ループ量子重力理論の研究によって得られた知見により、このように、従来の量子力学における角運動量の理論に対する新しい表現法を獲得できたという進歩である。よって、今後も超弦理論やループ量子重力理論の研究が進み、時空の本質的な理解が一層深まることが期待される。

## 5 謝辞

指導教官の坂井典佑教授と伊藤克司助教授には、書類の手続きなどでいろいろお世話になりました。また、場の理論ゼミでは、綿引芳之助手の助言が大きな支えとなりました。副審査員の白水徹也助教授も、鋭い指摘をして下さいました。同じゼミの、服部功君、平澤梨良さん、西原一幸君、田方直樹君という優秀なメンバーと一緒に勉強できたことも幸運でした。

卒業論文におけるパイノール計算については、飯野玲君（東大 数学科）と千田敏さん（東工大 数理・計算科学専攻）との議論がとても大きな助けとなり、理解が深められました。実際に手を動かして図式計算を行う楽しさを共有できたことは、無上の喜びです。

最後に、素晴らしい図式表現を発明した Sir Penrose に最大限の敬意を払うとともに、その業績を一般向けに紹介して下さいったサイエンスライター竹内薫さんに、心から感謝します。

## 参考文献

- [1] Roger Penrose, “Angular momentum: An approach to combinatorial space-time” in *Quantum Theory and Beyond* T. Bastin, ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1971) pp.151-180
- [2] Roger Penrose, “Combinatorial Quantum Theory and Quantized Directions” in *Advances in Twistor Theory*, Research Notes in Mathematics 37, L. P. Hughston and R. S. Ward, eds. (Pitman, San Francisco, 1979) pp. 301-307
- [3] Roger Penrose, “Applications of negative dimensional tensors” in *Combinatorial Mathematics and its Applications*, Proc. Conf., Oxford, 1969, DJA Welsh ed. (Academic Press, London, 1971) pp. 221-244
- [4] John P. Moussouris, “The Chromatic Evaluation of Strand Networks” and “Vector Coupling Coefficient and Spin Networks” in *Advances in Twistor Theory*, Research Notes in Mathematics 37, L. P. Hughston and R. S. Ward, eds. (Pitman, San Francisco, 1979) pp. 308-317
- [5] Louis H. Kauffman and Sóstenes L. Lins, *Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds*, Annals of Mathematics Studies N. 134. (Princeton University Press, Princeton, 1994) pp. 1-100
- [6] Louis H. Kauffman, *Knots and Physics*, Series on Knots and Everything-Vol. 1. (World Scientific, Singapore, 1991) pp. 443-474

- [7] Louis H. Kauffman, “Knots, spin networks and 3-manifold invariants” in *Knot 90*, Proceedings of the International Conference on Knot Theory and Related Topics, Osaka, Japan, 1990, A. Kawauchi, ed. (de Gruyter, Berlin, 1992) pp. 271-287
- [8] Seth A. Major, “A Spin Network Primer”, *Am. J. Phys.* **67** 972-980 (1999).
- [9] Roberto De Pietri, “On the relation between the connection and the loop representation of quantum gravity”, *Class. Quant. Grav.* **14** 53-69 (1990).
- [10] Simonetta Frittelli, Luis Lehner and Carlo Rovelli, “The complete spectrum of the area from recoupling theory in loop quantum gravity”, *Class. Quant. Grav.* **13**, 2921-2931 (1996).
- [11] Carlo Rovelli and Lee Smolin, “Spin Networks and Quantum Gravity,” *Phys. Rev. D* **52**, 5743-5759 (1995).
- [12] Roberto De Pietri and Carlo Rovelli, Appendix of “Geometry eigenvalues and the scalar product from recoupling theory in loop quantum gravity”, *Phys. Rev. D* **54**(4), 2664-2690 (1996).
- [13] Roger Penrose and Wolfgang Rindler, “Diagrammatic notation” in *Spinors and Space-Time: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*, Volume 1. (Cambridge University Press, Cambridge, 1984) pp.424-434
- [14] 小玉英雄, “スピネットワーク理論”, 数理科学 **457**, 43-50 (2001).
- [15] Lee Smolin, “時空の原子を追うループ量子重力理論 (原題: Atoms of Space and Time)” in 時空の起源に迫る宇宙論, 佐藤勝彦 編, 小玉英雄 監修, 別冊日経サイエンス 149. (日経サイエンス社, 2005) pp.122-132
- [16] 竹内薫, ベンローズのねじれた四次元 時空をつくるツイスターの不思議, ブルーバックス B-1260. (講談社, 1997) pp.18-25, 112-131, 202-261
- [17] 竹内薫, ループ量子重力入門 重力と量子論を統合する究極理論. (工学社, 2005) pp.1-142